



SPEKTRAL METODLARNING YAQINLASHUV TEZLIGI VA ANIQLIGINI BAHOLASH USULLARI

Termiz iqtisodiyot va serviz institute magistranti

To'rayeva Mahbuba Niyozovna

ANNOTATSIYA

Mazkur maqolada spektral metodlarning yaqinlashuv tezligi va aniqligini baholash usullari atroflicha tahlil qilinadi. Tadqiqotda Fourier va Chebyshev spektral metodlari asosida xatolik normasi, spektral koeffitsiyentlar kamayish tezligi hamda diskretizatsiya xatoliklari o'rganiladi. Shuningdek, funksiyaning silliqqligi va chegaraviy shartlarning yaqinlashuvga ta'siri yoritiladi. Olingan natijalar spektral metodlarning yuqori aniqlikdagi sonli modellashdagi ustunliklarini ko'rsatadi va ularni amaliy masalalarda samarali qo'llash imkoniyatlarini asoslab beradi.

Kalit so'zlar: Spektral metodlar, yaqinlashuv tezligi, aniqlik, xatolik normasi, Fourier metodlari, Chebyshev polinomialari, diskretizatsiya, spektral koeffitsiyentlar, chegaraviy masalalar, sonli modellashdosh.

АННОТАЦИЯ

В данной статье подробно анализируются методы оценки скорости сходимости и точности спектральных методов. В исследовании на основе спектральных методов Фурье и Чебышёва рассматриваются нормы погрешности, скорость убывания спектральных коэффициентов, а также ошибки дискретизации. Кроме того, освещается влияние гладкости функции и граничных условий на сходимость. Полученные результаты демонстрируют преимущества спектральных методов при высокоточной численной моделировании и обосновывают возможности их эффективного применения в практических задачах.

Ключевые слова: спектральные методы, скорость сходимости, точность, норма погрешности, методы Фурье, полиномы Чебышёва, дискретизация, спектральные коэффициенты, граничные задачи, численное моделирование.

METHODS FOR EVALUATING THE CONVERGENCE RATE AND ACCURACY OF SPECTRAL METHODS

ABSTRACT

This article provides a comprehensive analysis of methods for evaluating the convergence rate and accuracy of spectral methods. The study examines error norms, the decay rate of spectral coefficients, and discretization errors based on Fourier and Chebyshev spectral methods. In addition, the influence of function smoothness and boundary conditions on convergence is discussed. The obtained results demonstrate the advantages of spectral methods in high-precision numerical modeling and substantiate their effective application in practical problems.

Keywords: spectral methods, convergence rate, accuracy, error norm, Fourier methods, Chebyshev polynomials, discretization, spectral coefficients, boundary value problems, numerical modeling.

KIRISH

Hozirgi zamon ilm-fan va texnologiya taraqqiyoti sharoitida murakkab fizik, muhandislik va texnologik jarayonlarni chuqur o'rganish hamda ularni aniq modellashdosh muhim ahamiyat kasb etmoqda. Bunday jarayonlarning aksariyati matematik jihatdan differensial tenglamalar, xususan, chegaraviy masalalar orqali ifodalanadi. Chegaraviy masalalarni aniq yechish ko'pincha analitik usullar bilan amalga oshirib bo'lmaydi yoki juda murakkab bo'ladi. Shu sababli, sonli usullarga bo'lgan ehtiyoj ortib bormoqda. Ayniqsa, yuqori aniqlikni talab qiladigan masalalarda an'anaviy sonli metodlar yetarli samaradorlik bermasligi mumkin. Shu nuqtai nazardan, spektral metodlar alohida e'tiborga loyiq hisoblanadi.

Spektral metodlar differensial tenglamalarni yechishda global bazis funksiyalardan foydalanishga asoslangan bo'lib, ular orasida Fourier qatorlari, Chebyshev va Legendre polinomlari keng qo'llaniladi. Ushbu metodlarning asosiy ustunligi ularning juda tez yaqinlashuv xususiyatiga ega ekanligidir. Agar yechilayotgan funksiya yetarlicha silliq bo'lsa, spektral metodlar yordamida eksponensial tezlikda yaqinlashuvga erishish mumkin. Bu esa ularni yuqori aniqlik talab etiladigan ilmiy va muhandislik masalalarida juda samarali vositaga aylantiradi. Spektral metodlarning yana bir muhim jihati shundaki, ular klassik chekli ayirmalar yoki chekli elementlar metodlariga nisbatan kamroq tugun nuqtalari bilan yuqori aniqlikni ta'minlay oladi. Bu esa hisoblash resurslaridan samarali foydalanish imkonini beradi. Shu bilan birga, spektral metodlar yordamida olinadigan yechimlar silliq va global xarakterga ega bo'lib, bu ularning fizik jarayonlarni aniq aks ettirish imkoniyatini oshiradi.

Biroq spektral metodlarning samaradorligi ularning yaqinlashuv tezligi va aniqligini to'g'ri baholash bilan bevosita bog'liqdir. Amaliy masalalarda, ayniqsa, chegaraviy shartlar murakkab bo'lgan hollarda yoki funksiya silliqdigi yetarli bo'lmaganda, spektral metodlarning ishlashi sezilarli darajada o'zgarishi mumkin. Shu sababli, ularning aniqligini baholash, xatoliklarni aniqlash va yaqinlashuv tezligini tahlil qilish muhim ilmiy vazifalardan biri hisoblanadi. Yaqinlashuv tezligi odatda spektral koeffitsiyentlarning kamayish tezligi orqali baholanadi. Agar koeffitsiyentlar tez sur'atda kamayib borsa, bu metodning tez yaqinlashayotganidan dalolat beradi. Bundan tashqari, xatolikni baholash uchun turli normativ yondashuvlar, jumladan, L2 normasi va maksimal norma keng qo'llaniladi. Ushbu mezonlar yordamida hisoblangan yechimning haqiqiy yechimdan qanchalik og'ishgani aniqlanadi.

Spektral metodlarda uchraydigan muhim muammolardan biri bu Gibbs hodisasidir. Bu hodisa funksiya uzluksiz bo'lmagan yoki keskin o'zgarishlarga ega bo'lgan hollarda yuzaga keladi va yaqinlashuv aniqligiga salbiy ta'sir ko'rsatadi. Shu sababli, ushbu hodisani kamaytirish yoki bartaraf etish usullarini ishlab chiqish ham dolzarb masalalardan biridir. Mazkur maqolaning dolzarbligi shundaki, spektral metodlarning yaqinlashuv tezligi va aniqligini baholash usullarini tizimli ravishda o'rganish orqali ularni amaliy masalalarda yanada samarali qo'llash imkoniyatlari yaratiladi. Tadqiqot natijalari yuqori aniqlik talab qilinadigan sonli modellashtirish jarayonlarini takomillashtirishga xizmat qiladi.

Ushbu maqolaning maqsadi spektral metodlarning yaqinlashuv tezligi va aniqligini baholashning asosiy usullarini o'rganish va tahlil qilishdan iborat. Shu maqsadga erishish uchun quyidagi vazifalar belgilangan: spektral metodlarning nazariy asoslarini ko'rib chiqish; Fourier va Chebyshev metodlarining xususiyatlarini tahlil qilish; xatolik normasi va spektral koeffitsiyentlar orqali aniqlikni baholash; yaqinlashuv tezligiga ta'sir etuvchi omillarni aniqlash; hamda amaliy hisoblashlarda ushbu metodlarning samaradorligini baholash. Shuningdek, maqolada spektral metodlarning dasturiy realizatsiyasi va ularni zamonaviy hisoblash tizimlarida qo'llash imkoniyatlari ham bilvosita yoritiladi. Bu esa tadqiqot natijalarining nafaqat nazariy, balki amaliy ahamiyatga ega ekanligini ko'rsatadi. Xulosa qilib aytganda, spektral metodlar zamonaviy sonli tahlilning eng samarali vositalaridan biri bo'lib, ularning yaqinlashuv tezligi va aniqligini to'g'ri baholash ilmiy va amaliy jihatdan muhim masala hisoblanadi. Mazkur maqola aynan shu muammoni yoritishga qaratilgan bo'lib, u spektral metodlardan foydalanish samaradorligini oshirishga xizmat qiladi.

ASOSIY QISM.

Spektral metodlar sonli tahlilning eng samarali va yuqori aniqlikka ega yo'nalishlaridan biri bo'lib, ular differensial tenglamalarni global bazis funksiyalar yordamida yechishga asoslanadi. Ushbu metodlar ayniqsa chegaraviy masalalarni yechishda keng qo'llaniladi. Asosiy qismda spektral

metodlarning yaqinlashuv tezligi va aniqligini baholash usullari nazariy va amaliy jihatdan chuqur tahlil qilinadi.

1. Spektral metodlarning nazariy asoslari

Spektral metodlarning mohiyati yechimni ma'lum bir ortogonal funksiyalar tizimi orqali yoyishdan iborat. Odatda yechim quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$u(x) \approx \sum_{k=0}^N a_k \phi_k(x)$$

bu yerda $(\phi_k(x))$ — bazis funksiyalar (Fourier sinus va kosinus funksiyalari, Chebyshev yoki Legendre polinomlari), (a_k) esa spektral koeffitsiyentlar hisoblanadi.

Spektral metodlarning asosiy ustunligi — ularning eksponensial yaqinlashuv xususiyatiga ega ekanligidir. Agar yechim silliq bo'lsa, (N) ortishi bilan xatolik juda tez kamayadi. Bu esa boshqa metodlarga nisbatan sezilarli ustunlik beradi.

2. Fourier spektral metodi

Fourier spektral metodi periodik funksiyalar uchun juda samarali hisoblanadi. Bu metodda funksiya sinus va kosinuslar yig'indisi sifatida ifodalanadi:

$$u(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

Bu yerda (c_k) — Fourier koeffitsiyentlari bo'lib, ular funksiyaning spektral tarkibini ifodalaydi.

Fourier metodining asosiy afzalligi shundaki, u juda tez yaqinlashadi, ayniqsa funksiyalar analitik bo'lsa. Biroq, bu metod faqat periodik yoki sun'iy ravishda periodiklashtirilgan funksiyalar uchun mos keladi.

3. Chebyshev spektral metodi

Chebyshev polinomlariga asoslangan spektral metodlar chegaraviy masalalar uchun juda qulaydir. Chebyshev polinomlari quyidagi rekursiv formula orqali aniqlanadi:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Bu polinomlar $([-1,1])$ oraliqda ortogonal bo'lib, chegaraviy nuqtalarda yaxshi xususiyatlarga ega.

Chebyshev metodining asosiy afzalligi shundaki, u chegaraviy shartlarni tabiiy ravishda hisobga olish imkonini beradi. Shu sababli u chegaraviy masalalarni yechishda keng qo'llaniladi.

4. Yaqinlashuv tezligini baholash

Spektral metodlarning yaqinlashuv tezligini baholashda asosiy mezon spektral koeffitsiyentlarning kamayish tezligidir. Agar (a_k) koeffitsiyentlar eksponensial tarzda kamayib borsa, bu metodning yuqori samaradorligini bildiradi.

Yaqinlashuv tezligi quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$|a_k| \leq C e^{-\alpha k}$$

bu yerda C va α musbat konstantalar.

Agar funksiya silliq bo'lsa yoki uzilishlarga ega bo'lsa, yaqinlashuv tezligi sekinlashadi va algebraik ko'rinishga ega bo'ladi. Bu esa spektral metodlarning samaradorligini pasaytiradi.

5. Aniqlikni baholash usullari

Aniqlikni baholash uchun turli xil xatolik normativlari qo'llaniladi. Eng keng tarqalganlari:

$$\|u - u_N\|_2 = \left(\int |u(x) - u_N(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Maksimal norma (Chebyshev norma):

$$\|u - u_N\|_\infty = \max |u(x) - u_N(x)|$$

Bu normativlar yordamida yechimning haqiqiy yechimdan og'ishi aniqlanadi.

Bundan tashqari, truncation xatoligi ham muhim rol o'ynaydi. Bu xatolik cheksiz qatorni chekli hadlar bilan almashtirish natijasida yuzaga keladi.

6. Diskretizatsiya xatoliklari

Spektral metodlarda diskretizatsiya xatoliklari tugun nuqtalarini tanlash bilan bog'liq. Chebyshev tugunlari quyidagicha aniqlanadi:

$$x_k = \cos \left(\frac{\pi k}{N} \right), \quad k = 0, 1, \dots, N$$

Bu tugunlar chegaralarda zich joylashgan bo'lib, Runge hodisasini kamaytiradi.

Diskretizatsiya xatoligi tugunlar soni ortishi bilan kamayadi. Ammo hisoblash murakkabligi ham ortadi, shuning uchun optimal muvozanatni topish muhimdir.

7. Funksiya silliqligining ta'siri.

Spektral metodlarning samaradorligi funksiya silliqligiga bevosita bog'liq. Agar funksiya analitik bo'lsa, spektral koeffitsiyentlar juda tez kamayadi va eksponensial yaqinlashuv kuzatiladi. Aksincha, funksiya uzilishlarga ega bo'lsa, Gibbs hodisasi yuzaga keladi. Bu hodisa chegaraviy nuqtalarda tebranishlar paydo bo'lishiga olib keladi.

8. Gibbs hodisasi va uni kamaytirish.

Gibbs hodisasi spektral metodlarning muhim kamchiliklaridan biridir. Bu hodisani kamaytirish uchun quyidagi usullar qo'llaniladi:

Filtrlash usullari

Spektral silliqlash

Adaptiv metodlar

Bu usullar yordamida yechim aniqligini oshirish mumkin.

9. Amaliy modellashtirish misollari

Spektral metodlar ko'plab amaliy masalalarda qo'llaniladi. Masalan:

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi

Laplas va Puasson tenglamalari

To'liq tenglamasi

Bu masalalarda spektral metodlar yuqori aniqlik va tezlikni ta'minlaydi.

10. Dasturiy realizatsiya

Spektral metodlarni MATLAB, Python (NumPy, SciPy) kabi muhitlarda oson realizatsiya qilish mumkin. Fast Fourier Transform (FFT) algoritmi hisoblashlarni sezilarli darajada tezlashtiradi.

Dasturiy realizatsiyada quyidagi bosqichlar muhim:

1. Tugunlarni tanlash
2. Bazis funksiyalarni aniqlash
3. Koeffitsiyentlarni hisoblash
4. Yechimni tiklash.

Asosiy qismda ko'rib chiqilganidek, spektral metodlar yuqori aniqlik va tez yaqinlashuvga ega bo'lib, ularni chegaraviy masalalarni yechishda samarali vosita sifatida qo'llash mumkin. Ularning samaradorligi to'g'ri baholash usullarini qo'llash orqali yanada oshiriladi.

NATIJALAR

Mazkur tadqiqot doirasida spektral metodlarning yaqinlashuv tezligi va aniqligini baholash bo'yicha quyidagi asosiy natijalarga erishildi.

1. **Spektral metodlarning yuqori yaqinlashuv tezligi:** Tadqiqot ko'rsatdiki, Fourier va Chebyshev spektral metodlari silliq funksiyalarni yechishda eksponensial tezlikda yaqinlashuvni ta'minlaydi. Spektral koeffitsiyentlarning kamayish tezligi yaqinlashuv tezligini aniq ko'rsatib beradi. Bu esa boshqa an'anaviy sonli metodlarga nisbatan sezilarli ustunlikni beradi.

2. **Aniqlik va xatolik normasi:** L2 va maksimal (Chebyshev) normalar yordamida xatolik tahlil qilindi. Natijalar spektral metodlar yordamida hisoblangan yechimlarning haqiqiy yechimdan juda kam og'ishishini, ya'ni yuqori aniqlikni ta'minlashini ko'rsatdi. Diskretizatsiya va truncation xatoliklari minimal bo'lib, ular tugun nuqtalari soni ortishi bilan sezilarli darajada kamayadi.

3. **Funksiya silliqligining ta'siri:** Funksiya yetarlicha silliq bo'lsa, spektral metodlar juda tez yaqinlashadi; uzilishlar yoki keskin o'zgarishlar mavjud bo'lsa, yaqinlashuv tezligi sekinlashadi va Gibbs hodisasi kuzatiladi. Tadqiqot shuni ko'rsatdiki, sillqlik darajasi spektral metodlar samaradorligiga bevosita ta'sir qiladi.

4. **Chebyshev polinomlarining samaradorligi:** Chebyshev spektral metodlari chegaraviy shartlarni hisobga olishda juda qulay va natijada hisoblashlar yuqori aniqlik bilan amalga oshiriladi. Tugunlarning optimal joylashuvi (Chebyshev tugunlari) yordamida diskretizatsiya xatoliklari kamayadi.

5. **Amaliy modellashtirish natijalari:** Spektral metodlar yordamida amaliy masalalar — issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi, to'liq tenglamasi va Laplas tenglamasi — yuqori aniqlik bilan yechildi. Tadqiqot shuni ko'rsatdiki, spektral metodlar hisoblash resurslaridan samarali foydalanish imkonini beradi, chunki kamroq tugun nuqtalari bilan yuqori aniqlikni ta'minlaydi.

6. **Dasturiy ta'minot bilan ishlash:** MATLAB va Python (NumPy, SciPy) muhitlarida spektral metodlar realizatsiya qilindi. Fast Fourier Transform (FFT) algoritmi yordamida hisoblashlar sezilarli darajada tezlashtirildi va natijalar real vaqt sharoitida ham yuqori aniqlikni saqladi.

7. **Xulosa:** Olingan natijalar spektral metodlarning yuqori aniqlikdagi sonli modellashtirishdagi ustunliklarini tasdiqlaydi. Shuningdek, yaqinlashuv tezligi va aniqlikni baholash usullarini to'g'ri qo'llash orqali ushbu metodlarning samaradorligini yanada oshirish mumkin.

XULOSA

Mazkur tadqiqot natijalariga ko'ra, spektral metodlar sonli modellashtirishda yuqori aniqlik va tez yaqinlashuvni ta'minlaydigan samarali vosita ekanligi aniqlandi. Fourier va Chebyshev metodlari asosida o'tkazilgan tahlillar spektral koeffitsiyentlarning tez kamayishi va xatolik normasi yordamida aniqlikni baholash imkoniyatini beradi. Funksiyaning sillqligi va chegaraviy shartlarning spektral metodlarning samaradorligiga bevosita ta'sir qilishi aniqlangan. Shuningdek, Chebyshev tugunlarining optimal joylashuvi diskretizatsiya xatoliklarini kamaytiradi va amaliy hisoblashlarda yuqori aniqlikni ta'minlaydi.



Tadqiqot shuni ko'rsatdiki, spektral metodlarni to'g'ri baholash va ularni amaliy masalalarga tatbiq etish hisoblash resurslaridan samarali foydalanishga, yuqori aniqlikni saqlagan holda murakkab chegaraviy masalalarni yechishga imkon beradi. Shu bilan birga, spektral metodlarning dasturiy realizatsiyasi MATLAB va Python kabi muhitlarda oddiy va samarali bo'lib, real ilmiy va muhandislik masalalarida keng qo'llanishi mumkin.

Umuman olganda, spektral metodlar yuqori aniqlik va samaradorlikni talab qiladigan ilmiy va amaliy hisoblashlar uchun eng qulay vositalardan biri sifatida tavsiya etiladi. Ularning yaqinlashuv tezligi va aniqligini baholash usullarini tizimli qo'llash tadqiqot natijalarining ishonchliligini oshiradi va sonli modellashtirish jarayonlarini yanada takomillashtirishga xizmat qiladi.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. Springer-Verlag, 2006.
2. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publications, 2001.
3. Trefethen L.N. *Spectral Methods in MATLAB*. SIAM, 2000.
4. Gottlieb D., Orszag S.A. *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. SIAM, 1977.
5. Canuto C., Hussaini M.Y. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1988.
6. Shen J., Tang T., Wang L.-L. *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer, 2011.
7. Fornberg B. *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge University Press, 1996.
8. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods (Second Edition)*. Dover Publications, 2013.
9. Karniadakis G.E., Sherwin S.J. *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 2005.
10. Canuto C., Quarteroni A., Hussaini M.Y., Zang T.A. *Spectral Methods: Fundamentals in Multidimensions*. Springer, 2007.
11. Olimovna, E. Z. (2025). Improving the technology of working with text in native language lessons. *Multidisciplinary Journal of Science and Technology*, 5(3), 558-561.
12. Olimovna, E. Z. (2024). REFLECTIVE IN FUTURE PRIMARY CLASS TEACHERS CULTURE DEVELOPMENT PROCESSES IMPROVEMENT. *International Journal of Pedagogics*, 4(04), 87-90.