SIR Publishers
CENTER FOR INTERNATIONAL SCIENTIFIC PUBLICATIONS
JOURNAL OF MULTIDISCIPLINARY BULLETIN
ISSN(Online): 2984-6722
SJIF Impact Factor | (2023): 5.887 |
Volume-7, Issue-1, Published | 20-01-2024 |

CHEGARALANMAGAN SOHADA UCHINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN BIR CHEGARAVIY MASALA

https://doi.org/10.5281/zenodo.10593970

Ro‘ziyeva Zarnigor Otabek qizi
Farg‘ona davlat universiteti
e-mail: zroziyeva462@gmail.com

ANNOTATSIYA

Mazkur maqolada chegaralanmagan sohada uchinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masala qaralgan bo‘lib, masalaning yechimining yagonaligi integral energiya usulida, yechimning mavjudligi esa aniq ko‘rinishda topilgan.

Kalit so‘zlar

Yuqori tartibli tenglama, yechimning yagonaligi, Laplas operatori, yechimning mavjudligi, Grin funksiyasi.

Bu tipdagi tenglamalar uchun ustozlarimiz M.S.Salohiddinov [2], T.D.Jo‘rayev [1] va ularning shogirdlari tomonidan chegaraviy masalalar qo‘yilib, ularni o‘rganish nazariyalari yaratilgan. Hozirgi kunda ikkinchi, uchinchi va yuqori tartibli tenglamalar uchun ko‘plab mualliflar tomonidan chegaraviy masalalar tahlil etilgan[4,5,6]. Ushbu maqolada uchinchi tartibli tenglama uchun chegaralanmagan sohada chegaraviy masala o‘rganilgan.

Masalaning qo‘yilishi. Ushbu

$$\frac{\partial}{\partial y}\Delta U(x,y)=0 \qquad (1)$$

tenglamaning $D=\{(x,y):0<x<\infty, 0<y<\infty\}$ sohada regulyar bo‘lgan, $\overline{D}$ sohada uzluksiz shunday *U(x,y)* yechimini topingki, u quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:

$$U(x,y)\big|_{x=0}=\varphi_1(y), \qquad 0\le y<\infty, \qquad (2)$$

$$U(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_2(x), \qquad 0\le x<\infty, \qquad (3)$$

$$U_y(x,y)\big|_{y=0}=\varphi_3(x), \qquad 0\le x<\infty, \qquad (4)$$

$$\lim_{R\to\infty}U_y(x,y)=0, \qquad R^2=x^2+y^2, \qquad x>0, y>0. \qquad (5)$$

Bu yerda $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - Laplas operatori, $\varphi_i (i = \overline{1,3})$ - berilgan funksiyalar va

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \qquad (6)$$

kelishuv sharti oʻrinli.

Ushbu koʻrinishda belgilash kiritib,

$$U_y = V \qquad (7)$$

(1) tenglamani quyidagi koʻrinishda yozish mumkin:

$$\Delta V = 0 \qquad (8)$$

(7) ga asosan (2) - (5) chegaraviy shartlardan foydalanib, (8) tenglama uchun quyidagi chegaraviy shartlarni olamiz:

$$V(x,y)\big|_{x=0} = \varphi_1^{'}(y), \qquad V(x,y)\big|_{y=0} = \varphi_3(x), \qquad (9)$$

$$\lim_{R\to\infty} V(x,y) = 0, \qquad R^2 = x^2 + y^2, \qquad x>0, y>0. \qquad (10)$$

Masala yechimining yagonaligi.

Teorema. Agar masalaning yechimi mavjud boʻlsa, u holda yagona boʻladi.

Isbot. Masala yechimining yagonaligini isbotlash uchun (1) - (5) masalaga mos bir jinsli masalaning trivial yechimga ega ekanligini koʻrsatamiz, yaʼni

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial y} U\right) = 0 \qquad (1)$$

$$U(x,y)\big|_{x=0} = 0, \qquad U(x,y)\big|_{y=0} = 0, \qquad U_y(x,y)\big|_{y=0} = 0. \qquad (11)$$

masalani qaraymiz. (1) va (11) masala (7) belgilashga koʻra quyidagi masalaga ekvivalent:

$$\Delta V = 0, \qquad (8)$$

$$V(x,y)\big|_{x=0} = 0, \qquad V(x,y)\big|_{y=0} = 0, \qquad (12)$$

$$\lim_{R\to\infty} V(x,y) = 0, \quad R^2 = x^2 + y^2, \quad x>0, y>0. \qquad (10)$$

Ushbu

$$D_R = \left\{(x,y): x^2 + y^2 < R^2, x>0, y>0\right\},$$

$$\partial D_R = \left\{(x,y): (x=0) \cup (y=0) \cup \sigma_R\right\},$$

$$\sigma_R = \left\{(x,y): x^2 + y^2 = R^2, x>0, y>0\right\}$$

sohani qaraymiz.

(8) Laplas tenglamasini V(x,y) funksiyaga koʻpaytirib, D_R soha boʻyicha integral olamiz:

$$\iint\limits_{D_R} V(V_{xx} + V_{yy})dxdy = 0. \qquad (13)$$

Mazkur ko‘paytmada ba’zi shakl almashtirishlarni bajarib, (10), (12) chegaraviy shartlardan foydalansak, (13) tenglik quyidagi

$$\iint\limits_{D_R} \left[\left(V_x\right)^2 + (V_y)^2 \right] dxdy = 0. \qquad (14)$$

ko‘rinishga keladi. Bundan $V_x = V_y = 0$ tenglikni olamiz, bu tengliklardan $V = const$ ekanligi kelib chiqadi. Ammo bir jinsli (12) shartga asosan $\overline{D}$ da $V = 0$ yoki (7) belgilashga ko‘ra $U_y = 0$ bo‘ladi. Ma’lumki bu tenglamaning umumiy yechimi

$$U = \overline{\phi}(x) \qquad (15)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerda $\overline{\phi}(x)$ - ixtiyoriy noma’lum funksiya. (11) chegaraviy shartlarning biridan foydalansak, (15) tenglikdagi $\overline{\phi}(x)$ funksiya aynan nolga teng bo‘lib $U(x,y) = 0,\ (x,y) \in \overline{D}$ da $U_y = 0$ tenglama trivial yechimga ega ekanligini topamiz.

Teorema isbotlandi

Masala yechimining mavjudligi.

2-teorema. Agar

1) $\varphi_1(y),\ \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ funksiyalar uzluksiz va

2) $\left|\varphi_1'\right| \le \dfrac{C_1}{y^2},\quad y \to \infty,\qquad \left|\varphi_2\right| \le \dfrac{C_2}{x^2},\ \left|\varphi_3\right| \le \dfrac{C_3}{x^2},\ x \to \infty$ shartlarni qanoatlantirsa,

u holda (1) - (5) masalaning yechimi mavjud.

Isbot. Yechimning mavjudligini isbotlash uchun Grin funksiyalari [3] usulidan foydalanamiz.

U holda (8), (9), (10) masalaning yechimini ifodalovchi quyidagi formula o‘rinli ekanligi bizga ma’lum:

$$V(x,y) = \int_0^\infty G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_1'(\eta)d\eta - \int_0^\infty G_\eta(x,y;\xi,0)\varphi_3(\xi)d\xi\,;$$

Bu yerda:

$$G(z,\tau) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z^2 - \tau^{-2}}{z^2 - \tau^2}\right| \text{ - Grin funksiyasi.}$$

z=x+iy, $\tau = \xi + i\eta$.

Yoki Grin funksiyasini ko‘rinishidan foydalansak,

JOURNAL OF MULTIDISCIPLINARY BULLETIN
ISSN(Online): 2984-6722
SJIF Impact Factor | (2023): 5.887 |
Volume-7, Issue-1, Published | 20-01-2024 |

$$V(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{x^2+(y-\eta)^2}-\frac{x}{x^2+(y+\eta)^2}\right)\varphi_1'(\eta)d\eta- \\ -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}-\frac{y}{(x+\xi)^2+y^2}\right)\varphi_3(\xi)d\xi \qquad (16)$$

ifodaga ega boʻlamiz.

Endi (7) tenglamani (3) shartini qanoatlantiruvchi yechimini qidiramiz. Buning uchun (7) tenglamani [0, y] segmentda integrallab, (16) dan foydalansak,

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{y}\left[\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{x^2+(t-\eta)^2}-\frac{x}{x^2+(t+\eta)^2}\right)\varphi_1'(\eta)d\eta\right]dt- \\ -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{(x-\xi)^2+t^2}-\frac{t}{(x+\xi)^2+t^2}\right)\varphi_3(\xi)d\xi+\varphi_1(x) \qquad . \qquad (17)$$

Mavjudlik teoremasi shartlari bajarilganda U(x, y) funksiya masalada qoʻyilgan barcha shartlarni bajaradi.

Teorema isbotlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнения и смешанного и смешанно составного типов. Ташкент. Фан. 1979.-240 с.

2. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент. Фан.1974.

156с.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. Наука 1977.-736с.

4. Зикиров О.С., Газиев К.С. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка составного типа. Вестник НУУз. 2017, N 2/2, с138.

5. **Зикиров О.С., Рахматов Н.Б.** *О разрешимости нелокальной задачи для нагруженного уравнения третьего порядка. Неклассические уравнения математической физики и их приложения. 2022 г. 6-8-октября.*

6. **Сагдуллаева М.М.** *Об одной нелокальной задаче для уравнения в частных производных третьего порядка. Неклассические уравнения математической физики и их приложения. 2022 г. 6-8-октября.*